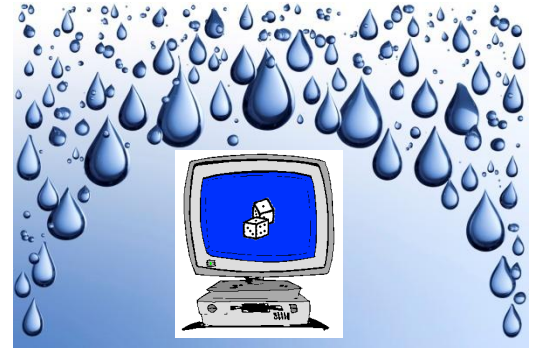


A Monte Carlo Simulation for Pi

Monte Carlo methods are statistical techniques using random numbers and probability to investigate problems. The expression "Monte Carlo method" was originally used by scientists working on nuclear weapons in the 1940s. You can find MC methods used in everything from economics to nuclear physics or modeling and regulating traffic flow.



طرائق مونت كارلو هي تقنيات احصائية تستخدم الأرقام العشوائية و الاحتمال للبحث في المسائل. استخدم لفظ مونت كارلو أساساً من قبل العلماء العاملين في مجال الأسلحة الذرية في الأربعينيات. بإمكانك رؤية طرائق مونت كارلو مستخدمة في كل شيء ابتداءً من علم الاقتصاد و انتهاءً بالفيزياء النووية و تخطيط و تنظيم حركة المرور .

Area of a circle

We will use a Monte Carlo method to estimate π and find the area of a circle. While it is possible to look the formula for the area of a circle it is the **mathematical process** that is important in this investigation.

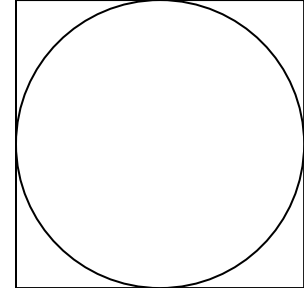
سنستخدم طريقة مونت كارلو لحساب... وإيجاد مساحة دائرة ما . بينما يكون من الممكن النظر في القواعد الخاصة بمساحة الدائرة فإنه من المهم في عملية التقصي أو التحقق هو العملية الرياضية .

Suppose you put a square board outside in the rain. A circle is drawn inside the square board. The chances are the rain drops will land randomly across the board. The number of raindrops landing in the circle compared with those in the outside area is proportional to the respective areas.

افترض أنك وضعت لوح مربع خارجاً تحت المطر . وأن هناك دائرة مرسومة داخل اللوح المربع. الاحتمالات هي أن تسقط نقاط المطر على اللوح عشوائياً. إن عدد قطرات المطر الهائلة ضمن الدائرة مؤثرة بتلك الهائلة خارجها متناسب مع حجم الشكل .

Question 1:

The picture shown opposite represents the circle and surrounding square board. If the rain lands randomly across the board, what percentage of rain drops do you think will hit the circle compared with those landing on the surrounding area? Explain your answer in detail.



السؤال 1 :

إن الرسم الظاهر أمامنا يمثل الدائرة واللوح المربع المحيط بها . إذا سقط المطر عشوائياً على اللوح فما هي حسب ظنك نسبة قطرات المطر التي ستهطل على الدائرة مقارنة بتلك التي ستهطل على المنطقة المحيطة ؟ اشرح جوابك بالتفصيل .

Question 2:

For the next stage of the investigation you will need a TI-83 or TI-84 graphical calculator. The calculator has a built in random number generator. The random numbers will appear as an ordered pair. You must generate 100 ordered pairs of random numbers. Write each one down and plot it on your graph. Each time a point is plotted you need to decide whether the point is inside the circle or outside. This is equivalent to rain drops landing randomly across the board.

ستحتاج الى آلة حاسبة من نوع TI-83 أو TI-84 وذلك من اجل المرحلة الثانية من عملية البحث في أو حل المسألة . ستظهر الأرقام العشوائية بشكل زوجي مرتب. عليك توليد 100 زوج مرتب من الأرقام العشوائية . اكتب كل على حدا ومثل ببياناً على آلتك الحاسبة عند تمثيل نقطة ما في كل مرة فإنك تحتاج أن تقرر اذا كانت النقطة داخل أم خارج الدائرة . هذا مماثل لقطرات المياه الهائلة عشوائياً على اللوح .

Calculator instructions

To generate the random numbers on the calculator use the following instructions:
Switch the calculator on, clear the memory, then go to the random number generator.

تعليمات الآلة الحاسبة :

من اجل توليد الأعداد العشوائية باستخدام الآلة الحاسبة , استخدم التعليمات التالية :
- اضغط مفتاح التشغيل – امسح الذاكرة- ثم اذهب الى مولد الأرقام العشوائية .

Press **MATH** then use the arrow keys \rightarrow and \downarrow to move across to the **Probability** menu then down to the **Random Integer** command.

اضغط m ثم استخدم مفاتيح الأسهم > و للتحرك ضمن قائمة الاحتمال ثم الأمر random integer



```
MATH NUM CPX PRB
1: Frac
2: Dec
3: 3
4: √(
5: *√
6: fMin(
7: fMax(
```

```
MATH NUM CPX PRB
1: rand
2: nPr
3: nCr
4: !
5: randInt(
6: randNorm(
7: randBin(
```

```
MATH NUM CPX PRB
1: rand
2: nPr
3: nCr
4: !
5: randInt(
6: randNorm(
7: randBin(
```

```
randInt(
```

```
randInt(0,20,2)
(16 19)
```

Press **ENTER** and the **randInt(** command is pasted to the home screen. Type (0, 20, 2) **ENTER** and a pair of randomly generated integers from 0-20 is produced.

اضغط e و مفتاح randInt يظهر على الشاشة. اكتب (0,20,2) e من ... 0- يتم انتاجه .

```
randInt(0,20,2)
(16 19)
(4 7)
(0 19)
(2 0)
(11 17)
(20 5)
```

20

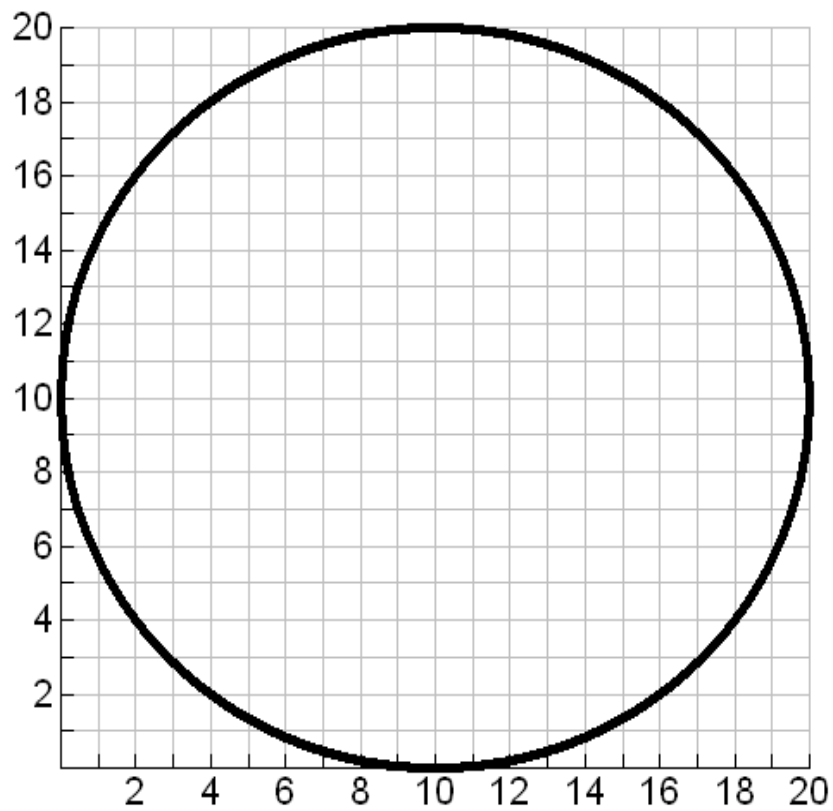
Question 3

Press **ENTER** several more times and more pairs are produced. Graph these pairs on the axes below and record them in the table provided.

اضغط e عدة مرات أخرى و سينتج لديك أرقام أخرى. مثل تلك الأزواج من الأرقام على المحاور أدناه و سجلهم في الجدول المعطى

You will need to discuss what to do with a point that lands on the circumference and explain your decision.

ستحتاج لمناقشة ما الذي يحل بنقطة تسقط على المحيط او المدار و علل قرارك .



Coordinates	Inside	Outside
1 (,)		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		

Coordinates	Inside	Outside
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		

Coordinates	Inside	Outside
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		
50		
Totals		

Coordinates	Inside	Outside
51		
52		
53		
54		
55		
56		
57		
58		
59		
60		
61		
62		
63		
64		
65		
66		
67		

Coordinates	Inside	Outside
68		
69		
70		
71		
72		
73		
74		
75		
76		
77		
78		
79		
80		
81		
82		
83		
84		

Coordinates	Inside	Outside
85		
86		
87		
88		
89		
90		
91		
92		
93		
94		
95		
96		
97		
98		
99		
100		
Totals		

Question 4

- a) What was the total number of points inside the circle? ما هو العدد الاجمالي للنقاط داخل الدائرة?

- b) What was your total number of points inside the square? ما هو عدديك الاجمالي للنقاط داخل المربع

- c) What is the ratio of points **inside the circle/points inside the square**? This is equal to $\frac{\pi}{4}$. ما هو معدل النقاط داخل الدائرة و النقاط داخل المربع ؟ هذا مساوي لـ $\frac{\pi}{4}$.

- d) Multiply by 4 to estimate π اضرب بأربعة لحساب π

- e) Use the previous two answers to determine the area of the circle. استخدم الجوابين السابقين لتحديد مساحة الدائرة

Like all Monte Carlo simulations the 'degree of accuracy' is related to the number of trials.

Although 100 trials take a while to do by hand, it is necessary to do a lot more than 100 trials.

ترتبط درجة الدقة في أسلوب مونت كارلو بعدد المحاولات. بالرغم من أن مئة محاولة تستغرق وقت للقيام بها يدوياً , إلا أن من الضروري القيام أكثر بكثير من مئة محاولة

Question 5

Rather than repeat another 100 trials, ask 9 friends to share their results with you. This brings the grand total of trials to 1000. Record your results (and friends) in the table below and repeat the previous questions for determining the area of the circle based on Monte Carlo simulation.

السؤال الخامس :

أن تطلب من تسعة أصدقاء مشاركة نتائجهم معك هو أفضل من تكرار مئة محاولة أخرى. سجل نتائجك و نتائج زملائك في الجدول أدناه و كرر الأسئلة السابقة لتحديد مساحة الدائرة بالاستناد الى طريقة مونت كارلو

Friends Name:	Number Inside	Number Outside	% Inside Circle
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
My Results			
Totals:			

Question 6.

Use your table of results with all 1000 trials to determine the average percentage area the circle occupies.

Discuss your results, specifically the amount of area the circle occupies.

السؤال السادس :

استخدم جدول نتائجك الذي يحتوي على الف محاولة لتحديد متوسط النسبة للمساحة التي تحتلها الدائرة . ناقش نتائجك , خصوصاً مقدار المساحة التي تحتلها الدائرة .

Question 7.

Use either a computer or graphical calculator to simulate 10,000 trials to determine the percentage area the circle occupies. Determine the corresponding area of the circle and comment on your results.

السؤال السابع :

استخدم إما الكمبيوتر أو الآلة الحاسبة البيانية لتمثل عشرة آلاف محاولة لتحديد نسبة المساحة التي تحتلها الدائرة .

Question 8

Describe how you could use the simulation to calculate a value for pi

السؤال 8 :

صف كيف بإمكانك استخدام عملية التمثيل الرياضي لحساب قيمة ...

The website <http://polymer.bu.edu/java/java/montepi/MontePi.html> has an applet which performs this simulation at speed.

Notes To Teacher: ملاحظات للمعلم

A. Generating truly random numbers on the calculator

توليد أرقام عشوائية حقيقية باستخدام الآلة الحاسبة

Explain to students that the TI calculator does not generate truly random values. Instead it depends on the **seed value** stored in the calculator. Two calculators with the same seed values will produce the same digits.

اشرح للطلاب بأن الآلة الحاسبة من نوع TI لا تولد أرقام عشوائية حقيقية. بل إنها بدل من ذلك تعتمد على القيمة الأساسية المخزنة في الآلة الحاسبة. لذلك فإن آلتين حاسبتين بنفس القيم الأساسية ستنتج الأرقام ذاتها.

Seed the calculator with a truly randomly generated number – you could roll a die or use the last 4 digits of your telephone number

زود الآلة الحاسبة برقم مولد عشوائياً بصورة حقيقية _ تستطيع رمي حجر زهر واحد أو استخدام آخر أربعة أرقام من رقم هاتفك.

For example 2374 **[STO]** **rand** **[ENTER]** etc. You can type **rand** command into the calculator directly onto the home screen or cut and paste it from the **catalogue** using the **[2nd]** **[0]** **[v]** **[ENTER]** keys as shown below.

مثلاً : 2374 = rand e الخ... . تستطيع كتابة أمر rand في الآلة الحاسبة مباشرة على الشاشة الرئيسية أو قصر و لصقه من الكاتالوك باستخدام مفتاحي e o كما هو موضح أدناه .

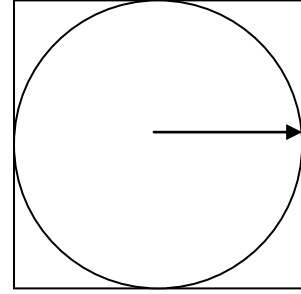
2347→	CATALOG ▸abs(and angle(ANOVA(Ans Archive Asm(A	CATALOG ▸Radian rand randBin(randInt(randM(randNorm(re^θi A
CATALOG Radian ▸rand randBin(randInt(randM(randNorm(re^θi A	2347→rand■	2347→rand 2347

Now any values produced by the **randInt** command will **truly** be random.

الآن أية قيم أنتجها الأمر randInt ستكون عشوائية حقاً .

B. How the mathematical process works ؟ كيف تجري العملية الرياضية ؟

You should work through the following ideas with the boys:
عليك العمل مع الطلاب من خلال تلك الأفكار .



- The area of the square is proportional to r^2
- The area of the square is $4r^2$
- The area of the circle is proportional to r^2 but not by a factor of 4.
Let's call the factor π . So area = πr^2
- The ratio of the $\frac{\text{area of circle}}{\text{area of square}} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$
- Multiply the ratio by 4 to estimate pi.
- Use the value of pi to calculate the area of any circle.